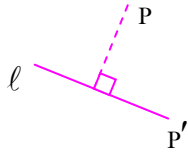


## เรขาคณิตวิเคราะห์

## 1. โพรเจกชัน

1. โพรเจกชันของจุด  $P$  บนเส้นตรง  $l$  คือ จุดตัดของเส้นตรง  $l$  กับเส้นตรงที่ลากจากจุด  $P$  มาตั้งฉากกับ  $l$



$P'$  เป็นโพรเจกชันของจุด  $P$  บนเส้นตรง  $l$

2. โพรเจกชันของจุด  $(x, y)$  บนแกน  $X$  คือ  $(x, 0)$   
โพรเจกชันของจุด  $(x, y)$  บนแกน  $Y$  คือ  $(0, y)$
3. โพรเจกชันของจุด  $(a, b)$  บนเส้นตรง  $y = x$  คือ  $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$

## 2. จุดบนระนาบ

ให้  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$  และ  $R(x_3, y_3)$

ระยะระหว่างจุดสองจุด

$$|PQ| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง  $AB$  คือ  $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

จุดตัดกันของเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม เรียกว่า **จุดจwab**

จุดจwabของรูปสามเหลี่ยม  $PQR$  คือ  $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

## 3. การหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม

ให้  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $\dots$ ,  $(x_n, y_n)$  เป็นจุดยอดของรูป  $n$  เหลี่ยม

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่รูป } n \text{ เหลี่ยม} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left| (\text{ผลบวกของผลคูณทแยงลง}) - (\text{ผลบวกของผลคูณทแยงขึ้น}) \right| \end{aligned}$$

**ข้อควรระวัง**

- 1) เริ่มต้นที่จุดใด ต้องลงท้ายด้วยจุดนั้น
- 2) ต้องเรียงจุดในทิศทางเข็มนาฬิกา หรือตามเข็มนาฬิกาเพียงทิศทางเดียว

#### 4. ความชัน

ให้  $P(x_1, y_1)$  และ  $Q(x_2, y_2)$  โดยที่  $x_1 \neq x_2$

$m$  เป็นความชันของเส้นตรง  $PQ$

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \tan \theta$$

เมื่อ  $\theta$  เป็นมุมเอียงของเส้นตรง วัด  $\theta$  จากแกน  $x$  ด้านบวกในทิศทวนเข็มนาฬิกา ถึงเส้นตรงที่กำหนด  $0^\circ < \theta < 180^\circ$

#### พิจารณาเส้นตรงตามลักษณะของความชัน

1. เส้นตรงขนานแกน  $X$  ความชันเป็นศูนย์
2. เส้นตรงขนานแกน  $Y$  ความชันหาค่าไม่ได้
3. เส้นตรงเอียงทำมุมแหลมกับแกน  $X$  ความชันเป็นบวก
4. เส้นตรงเอียงทำมุมป้านกับแกน  $X$  ความชันเป็นลบ

#### ข้อควรจำ

- 1) เส้นตรงเส้นเดียวกัน ความชันย่อมเท่ากัน
- 2) เส้นตรงสองเส้น(ไม่ขนานแกน  $Y$ )จะขนานกัน ก็ต่อเมื่อเส้นตรงทั้งสองมีความชันเท่ากัน
- 3) เส้นตรงสองเส้น(ไม่ขนานแกน  $Y$ )จะตั้งฉากกัน ก็ต่อเมื่อผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเป็น  $-1$

#### 5. สมการเส้นตรง

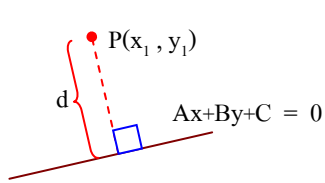
เงื่อนไขของเส้นตรง	รูปสมการ
1. ขนานแกน $X$ ตัดแกน $Y$ ที่จุด $(0, b)$	$y = b$
2. ขนานแกน $Y$ ตัดแกน $X$ ที่จุด $(a, 0)$	$x = a$
3. ความชัน $m$ ผ่านจุด $(x_1, y_1)$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
4. ความชัน $m$ ระยะเวลาตัดแกน $Y$ เป็น $c$	$y = mx + c$
5. ระยะเวลาตัดแกน $X$ เป็น $a$ ระยะเวลาตัดแกน $Y$ เป็น $b$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

เส้นตรงมีสมการรูปทั่วไปเป็น  $Ax + By + C = 0$  เมื่อ  $A, B, C$  เป็นค่าคงตัว

โดยที่  $A$  และ  $B$  ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เส้นตรงนี้มีความชันเป็น  $-\frac{A}{B}$

### 6. ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด

ให้  $d$  เป็นระยะทางจากจุด  $P(x_1, y_1)$  ไปยังเส้นตรง  $Ax + By + C = 0$



$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

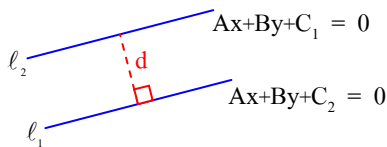
### 7. ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน

กำหนด  $l_1$  และ  $l_2$  เป็นเส้นตรงที่ขนานกัน 2 เส้น

$$l_1 : Ax + By + C_1 = 0$$

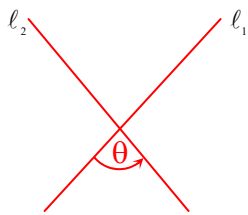
และ  $l_2 : Ax + By + C_2 = 0$

ให้  $d$  เป็นระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน  $l_1$  กับ  $l_2$



$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

### 8. มุมที่เกิดจากเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน



กำหนดให้เส้นตรง  $l_1$  และ  $l_2$  มีความชันเป็น  $m_1$  และ  $m_2$  ตามลำดับ  
 $\theta$  เป็นมุมที่เกิดจากเส้นตรง  $l_1$  ตัดกับ  $l_2$  โดยวัดจาก  $l_1$  ไป  $l_2$   
 ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

### 9. วงกลม

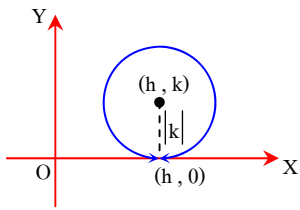
**วงกลม** คือ เซตของจุดทุกจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุดตรึงจุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน เรียกจุดตรึงว่า

**จุดศูนย์กลาง** ของวงกลม ระยะทางที่เท่ากัน คือ **รัศมีของวงกลม**

สมการวงกลม	จุดศูนย์กลาง	รัศมี
$x^2 + y^2 = r^2$	$(0, 0)$	$r$
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	$(h, k)$	$r$
$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$	$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$	$\sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$

## วงกลมกับเส้นสัมผัส

### 9.1 วงกลมสัมผัสแกน X

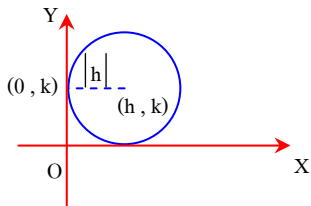


วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่  $(h, k)$

สัมผัสแกน X ที่  $(h, 0)$  จะมีรัศมียาว  $|k|$  หน่วย

สมการวงกลม คือ  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = k^2$

### 9.2 วงกลมสัมผัสแกน Y

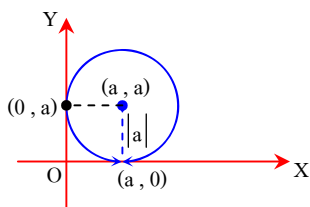


วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่  $(h, k)$

สัมผัสแกน Y ที่  $(0, k)$  จะมีรัศมียาว  $|h|$  หน่วย

สมการวงกลม คือ  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = h^2$

### 9.3 วงกลมสัมผัสทั้งแกน X และแกน Y



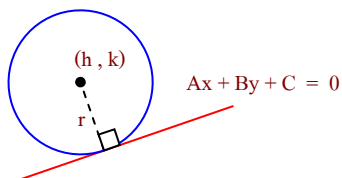
วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่  $(a, a)$

สัมผัสแกน X ที่จุด  $(a, 0)$

สัมผัสแกน Y ที่จุด  $(0, a)$  จะมีรัศมียาว  $|a|$  หน่วย

สมการวงกลม คือ  $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$

### 9.4 วงกลมสัมผัสเส้นตรงที่ไม่ขนานแกน X หรือแกน Y

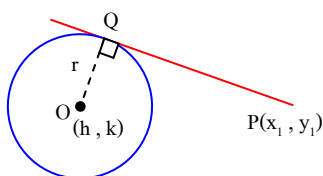


วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่  $(h, k)$

สัมผัสเส้นตรง  $Ax + By + C = 0$

ความยาวรัศมี  $(r) = \frac{|Ah + Bk + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

### 9.5 ความยาวของเส้นสัมผัส



กำหนดให้  $P(x_1, y_1)$  และ PQ สัมผัสวงกลม  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

หรือ  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$|PQ| = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$  หรือ

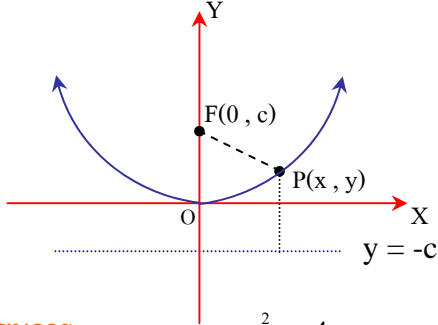
$|PQ| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$

## 10. พาราโบลา

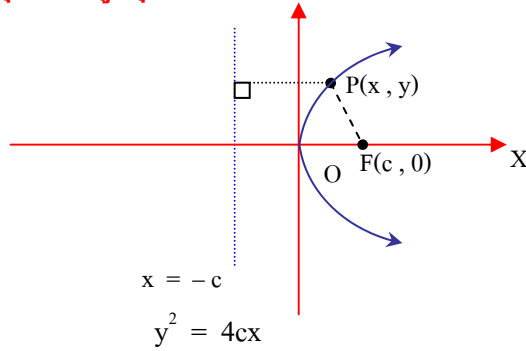
**พาราโบลา** คือ เซตของจุดทุกจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุดตรึงจุดหนึ่ง และเส้นตรงคงที่ที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ เรียกจุดตรึงว่า **จุดโฟกัส** และเรียกเส้นตรงคงที่ว่า **เส้นไดเรกทริกซ์**

เส้นตรงที่ลากผ่านจุดโฟกัส จุดยอด และตั้งฉากกับเส้นไดเรกทริกซ์ เรียกว่า **แกนของพาราโบลา** หรือ **แกนสมมาตร** จุดยอดจะอยู่ที่กึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัสกับเส้นไดเรกทริกซ์

### สมการพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด (0,0)

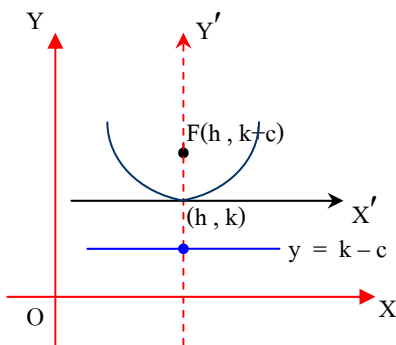


<b>รูปสมการ</b>	$x^2 = 4cy$
<b>จุดยอด</b>	(0, 0)
<b>จุดโฟกัส</b>	(0, c)
<b>สมการเส้นไดเรกทริกซ์</b>	$y = -c$
<b>แกนของพาราโบลา</b>	แกน y
<b>c &gt; 0</b>	รูปหงาย
<b>c &lt; 0</b>	รูปคว่ำ

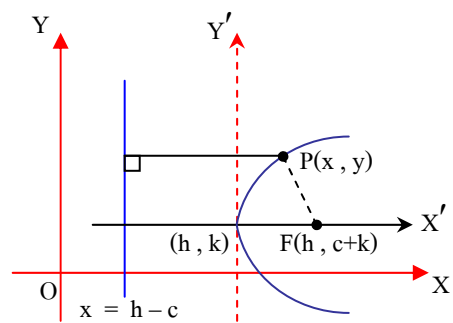


$x = -c$	$y^2 = 4cx$
	(0, 0)
	(c, 0)
$x = -c$	
แกน X	
ตะแคงขวา (เปิดขวา)	
ตะแคงซ้าย (เปิดซ้าย)	

### สมการพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ (h, k)



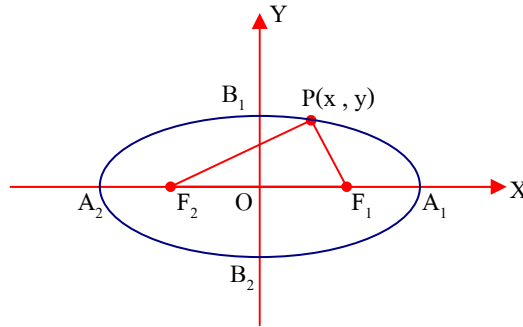
<b>รูปสมการ</b>	$(x - h)^2 = 4c(y - k)$
<b>จุดยอด</b>	(h, k)
<b>จุดโฟกัส</b>	(h, k + c)
<b>สมการเส้นไดเรกทริกซ์</b>	$y = k - c$
<b>แกนของพาราโบลา</b>	$x = h$
<b>c &gt; 0</b>	รูปหงาย
<b>c &lt; 0</b>	รูปคว่ำ



$x = h - c$	$(y - k)^2 = 4c(x - h)$
	(h, k)
	(h + c, k)
$x = h - c$	
$y = k$	
ตะแคงขวา (เปิดขวา)	
ตะแคงซ้าย (เปิดซ้าย)	

## 11. วงรี

วงรี คือ เซตของทุกจุดซึ่งมีระยะห่างจากจุดคงที่ 2 จุดรวมกันคงที่เสมอ



$$|PF_1| + |PF_2| = |2a|$$

จุดคงที่ เรียกว่า **จุดโฟกัส** ของวงรี (จุด  $F_1, F_2$ )

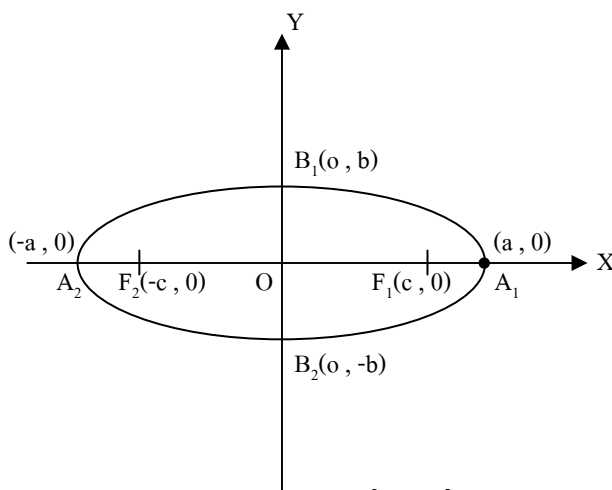
จุดกึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสองเรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** ของวงรี (จุด O)

จุดที่เส้นตรงผ่านจุดโฟกัสทั้งสองตัดวงรีเรียกว่า **จุดยอด** ของวงรี (จุด  $A_1, A_2$ )

ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสองเรียกว่า **แกนเอก** คือเส้น  $A_1A_2$

ส่วนของเส้นตรงที่ลากตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดศูนย์กลางตัดกับวงรีเรียกว่า **แกนโท** คือเส้น  $B_1B_2$

**สมการวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0)**



**รูปสมการ**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**จุดศูนย์กลาง**

$$(0, 0)$$

**จุดยอด**

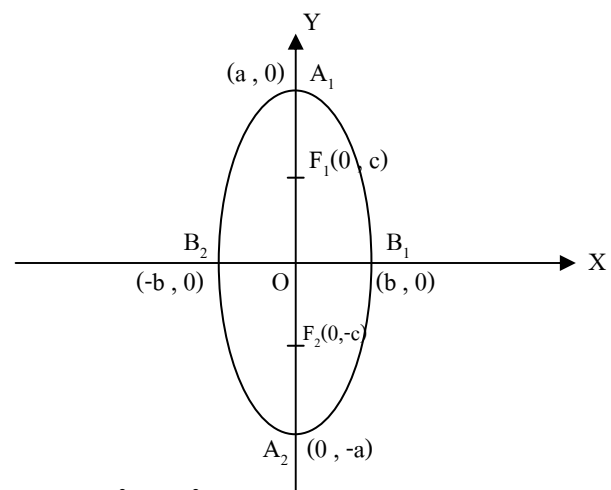
$$(\pm a, 0)$$

**จุดโฟกัส**

$$(\pm c, 0)$$

**จุดปลายแกนโท**

$$(0, \pm b)$$



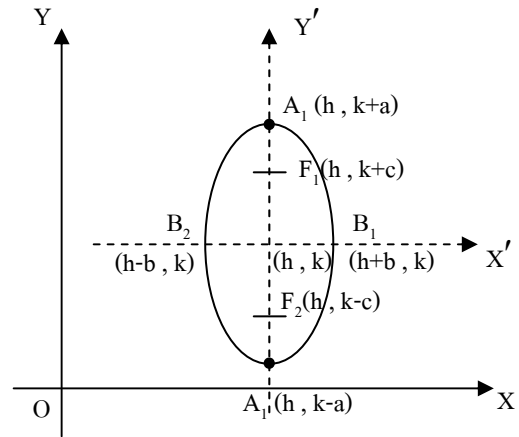
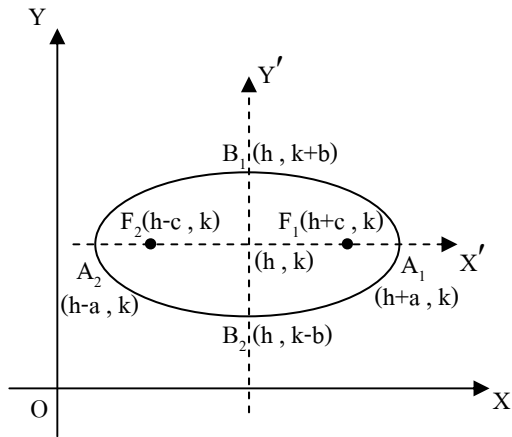
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$(0, 0)$$

$$(0, \pm a)$$

$$(0, \pm c)$$

$$(\pm b, 0)$$

สมการวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(h, k)$ 

รูปสมการ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

จุดศูนย์กลาง

 $(h, k)$  $(h, k)$ 

จุดยอด

 $(h \pm a, k)$  $(h, k \pm a)$ 

จุดโฟกัส

 $(h \pm c, k)$  $(h, k \pm c)$ 

จุดปลายแกนโท

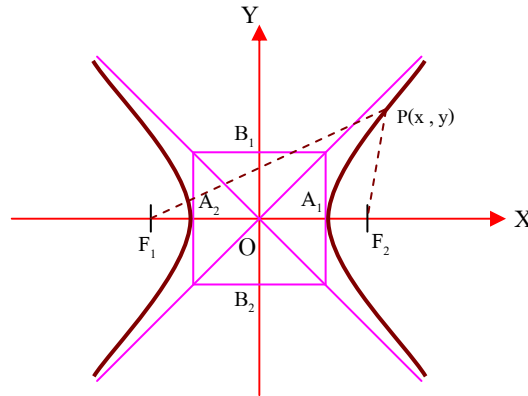
 $(h, k \pm b)$  $(h \pm b, k)$ 

## ข้อควรทราบ

- 1) ความยาวแกนเอก  $A_1A_2 = |2a|$
- 2) ความยาวแกนโท  $B_1B_2 = |2b|$
- 3) จุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส อยู่บนแกนเอก
- 4) ความสัมพันธ์ระหว่าง  $a, b, c$  จะได้  $|a|$  มีค่ามากที่สุด และ  $a^2 = b^2 + c^2$
- 5) การพิจารณารูปวงรี จัดสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน แล้วดูค่าคงตัวที่หาร  $x^2$  และ  $y^2$  ถ้าตัวใดมากกว่าแกนเอกจะอยู่บนแกนนั้น

## 12. ไฮเพอร์โบลา

**ไฮเพอร์โบลา** คือ เซตของจุดทุกจุดซึ่งผลต่างระหว่างระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุด มีค่าคงตัว



$$|PF_1| - |PF_2| = |2a|$$

จุดคงที่ เรียกว่า **จุดโฟกัส** ของไฮเพอร์โบลา (จุด  $F_1, F_2$ )

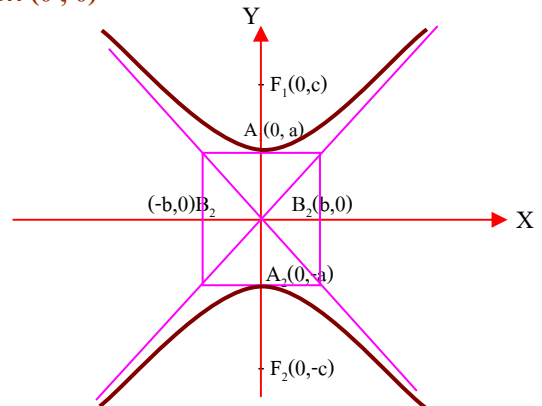
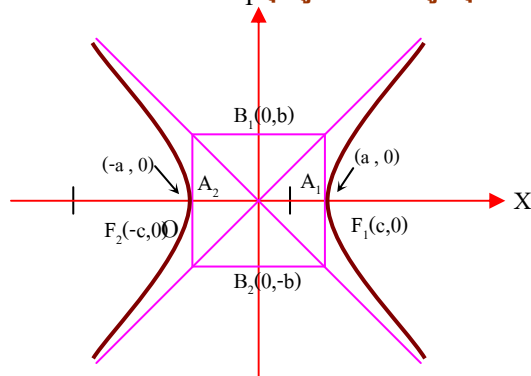
จุดกึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสองเรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** ของไฮเพอร์โบลา (จุด O)

จุดที่เส้นตรงผ่านจุดโฟกัสทั้งสองตัดไฮเพอร์โบลาเรียกว่า **จุดยอด** ของไฮเพอร์โบลา (จุด  $A_1, A_2$ )

ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสองเรียกว่า **แกนตามขวาง** คือ เส้น  $A_1A_2$

ส่วนของเส้นตรง  $B_1B_2$  เรียกว่า **แกนตั้งยุด** ซึ่งกราฟไม่ตัดแกนนี้

**สมการไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0)**



**รูปสมการ**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

**จุดศูนย์กลาง**

$$(0, 0)$$

$$(0, 0)$$

**จุดยอด**

$$(\pm a, 0)$$

$$(0, \pm a)$$

**จุดโฟกัส**

$$(\pm c, 0)$$

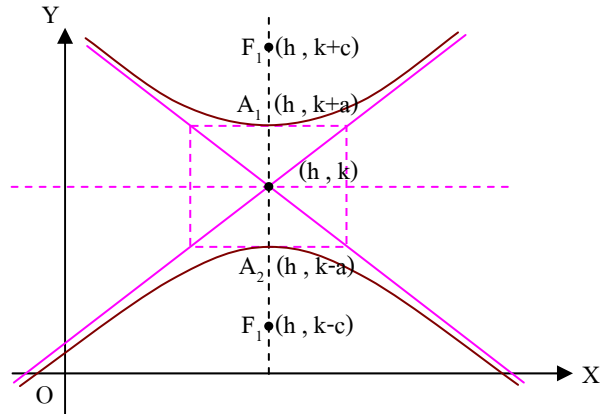
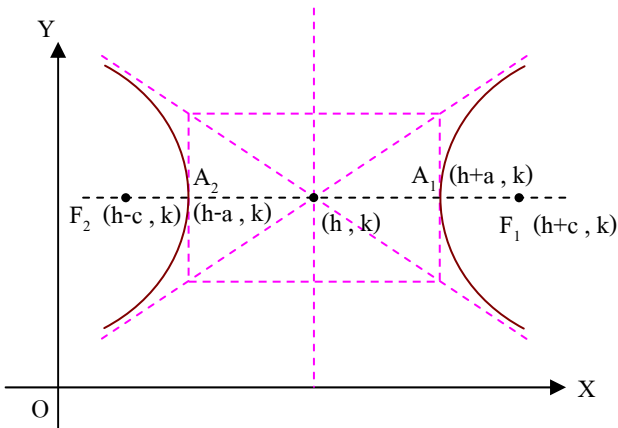
$$(0, \pm c)$$

**จุดปลายแกนตั้งยุด**

$$(0, \pm b)$$

$$(\pm b, 0)$$

สมการไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด  $(h, k)$



รูปสมการ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

จุดศูนย์กลาง

$$(h, k)$$

$$(h, k)$$

จุดยอด

$$(h \pm a, k)$$

$$(h, k \pm a)$$

จุดโฟกัส

$$(h \pm c, k)$$

$$(h, k \pm c)$$

จุดปลายแกนโท

$$(h, k \pm b)$$

$$(h \pm b, k)$$

ข้อควรทราบ

- 1) ความยาวแกนตามขวาง  $A_1A_2 = |2a|$
- 2) ความยาวแกนตั้งยุค  $B_1B_2 = |2b|$
- 3) จุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส อยู่บนแกนตามขวาง
- 4) ความสัมพันธ์ระหว่าง  $a, b, c$  จะได้  $|c|$  มีค่ามากที่สุด ไม่สามารถบอกได้ว่า  $|a|$  หรือ  $|b|$  ค่าใดมากกว่ากัน และ  $c^2 = a^2 + b^2$
- 5) การพิจารณากราฟไฮเพอร์โบลา จัดสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน แล้วดูเครื่องหมายหน้า  $x^2$  และ  $y^2$  ถ้าตัวใดเป็นบวก แกนตามขวางจะอยู่บนแกนนั้น

**ไฮเพอร์โบลามุมฉาก** คือ ไฮเพอร์โบลาที่มีความยาวแกนตามขวางเท่ากับความยาวแกนตั้งยุค

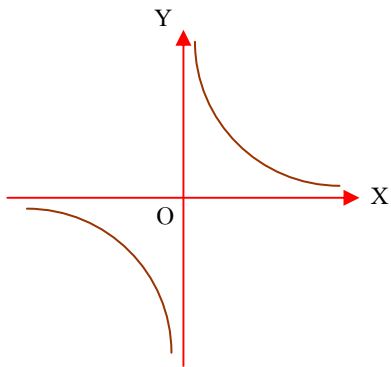
$$(|2a| = |2b|)$$

สมการอยู่ในรูป  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$  หรือ  $x^2 - y^2 = a^2$

ไฮเพอร์โบลามุมฉากในรูป  $xy = k$

$$xy = k \quad \text{เมื่อ} \quad k > 0$$

$$xy = k \quad \text{เมื่อ} \quad k < 0$$

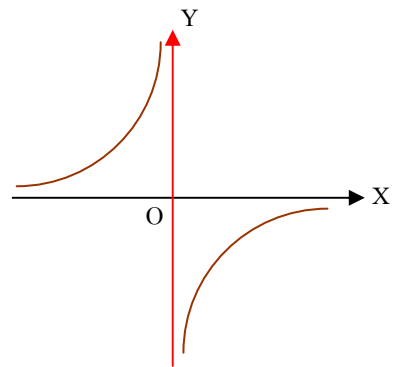


จุดยอด  $(\sqrt{k}, \sqrt{k})$

และ  $(-\sqrt{k}, -\sqrt{k})$

จุดโฟกัส  $(\sqrt{2k}, \sqrt{2k})$

และ  $(-\sqrt{2k}, -\sqrt{2k})$



จุดยอด  $(\sqrt{|k|}, -\sqrt{|k|})$

และ  $(-\sqrt{|k|}, \sqrt{|k|})$

จุดโฟกัส  $(\sqrt{2|k|}, -\sqrt{2|k|})$

และ  $(-\sqrt{2|k|}, \sqrt{2|k|})$