

เมตริกซ์

1. มิติ และสัญลักษณ์

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

A เป็นเมตริกซ์ที่มี m แถว n หลัก เรียกว่า **เมตริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$ หรือ $m \times n$ เมตริกซ์**

a_{ij} คือ สมาชิกของเมตริกซ์ A ซึ่งอยู่ในแถวที่ i หลักที่ j

2. ชนิดของเมตริกซ์ที่ควรทราบ

เมตริกซ์จัตุรัส คือ เมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก

เมตริกซ์ศูนย์ คือ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ ใช้สัญลักษณ์ 0 หรือ $[0]_{m \times n}$

เส้นทแยงมุมหลัก ของเมตริกซ์จัตุรัส $[a_{ij}]_{n \times n}$ หมายถึง สมาชิก a_{ij} เมื่อ $i = j$

เมตริกซ์เอกลักษณ์ คือ เมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักเป็น 1 และสมาชิกที่เหลือเป็น 0

ใช้สัญลักษณ์ I_n แทนเมตริกซ์เอกลักษณ์ มิติ $n \times n$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ทแยงหรือเมตริกซ์เฉียง คือ เมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกนอกเส้นทแยงมุมหลักเป็น 0 ทุกตัว

3. ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

การเท่ากันของเมตริกซ์ $A = B$ ก็ต่อเมื่อ A และ B มีมิติเท่ากัน และสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน

นั่นคือ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกค่าของ i และ j

การบวกลบเมตริกซ์ เมตริกซ์ A และ B จะบวกลบกันได้จะต้องมีมิติเท่ากัน โดยนำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาบวกลบกัน และผลลัพธ์มีมิติเท่าเดิม

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$$

การคูณเมตริกซ์ด้วยจำนวนจริง

$$cA = [ca_{ij}]_{m \times n}$$

นำจำนวนจริง c คูณสมาชิกของ A ทุกตัว ผลลัพธ์มีมิติเท่าเดิม

การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ เมตริกซ์ที่จะคูณกันได้ต้องมีจำนวนหลักของตัวตั้งเท่ากับจำนวนแถวของตัวคูณ

$$\text{ให้ } A = [a_{ij}]_{m \times p} \text{ และ } B = [b_{ij}]_{p \times n}$$

ผลคูณ $C = AB$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ ซึ่ง $C = [c_{ij}]_{m \times n}$

$$\text{โดยที่ } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

ทรานสโพสของเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย A^t คือ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j เหมือนกับสมาชิกในแถวที่ j หลักที่ i ของเมตริกซ์ A

$$\text{ให้ } A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ และ } A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$$

$$\text{จะได้ } a_{ij} = b_{ji} \text{ สำหรับทุกค่าของ } i \text{ และ } j$$

4. สมบัติต่างๆเกี่ยวกับเมตริกซ์ที่ควรสนใจ

ให้ A, B, C เป็นเมตริกซ์ที่สามารถคูณกันได้

$$4.1 \quad (AB)C = A(BC) \quad (\text{เปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ})$$

$$4.2 \quad A(B+C) = AB+AC \quad (\text{แจกแจง})$$

$$(B+C)A = BA+BC$$

$$4.3 \quad A + \underline{0} = A = \underline{0} + A \quad (\text{เอกลักษณ์การบวกของเมตริกซ์ คือ } \underline{0})$$

$$4.4 \quad A + (-A) = \underline{0} = (-A) + A \quad (\text{อินเวอร์สการบวกของเมตริกซ์ } A \text{ คือ } -A)$$

$$4.5 \quad AI = A = IA \quad (\text{เอกลักษณ์การคูณของเมตริกซ์ คือ } I_n)$$

$$4.6 \quad AA^{-1} = I = A^{-1}A \quad (\text{อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ } A \text{ คือ } A^{-1})$$

$$4.7 \quad A^2 = AA, A^3 = A^2A = AA^2, \dots$$

$$4.8 \quad AB \text{ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ } BA$$

$$4.9 \quad \text{ถ้า } AB = AC \text{ ไม่จำเป็นที่ } B = C$$

$$4.10 \quad \text{ถ้า } AB = \underline{0} \text{ ไม่จำเป็นที่ } A = \underline{0} \text{ หรือ } B = \underline{0}$$

$$4.11 \quad \left. \begin{array}{l} \text{โดยทั่วไป } (A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2 \\ A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B) \end{array} \right\} \text{ จะเท่ากันได้เมื่อ } AB = BA$$

$$4.12 \quad (A^t)^t = A$$

$$4.13 \quad (cA)^t = cA^t$$

$$4.14 \quad (A \pm B)^t = A^t \pm B^t$$

$$4.15 \quad (AB)^t = B^t A^t$$

5. ดีเทอร์มิแนนต์

ให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง

ดีเทอร์มิแนนต์ของ A แทนด้วยสัญลักษณ์ $\det(A)$ หรือ $|A|$

การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์

$$1. \text{ ถ้า } A = [a] \text{ เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติ } 1 \times 1 \text{ แล้ว } \det(A) = a$$

$$2. \text{ ถ้า } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติ } 2 \times 2 \text{ แล้ว } \det(A) = ad - bc$$

3. ถ้า $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 3×3

$$\text{แล้ว } \det(A) = \begin{array}{|ccc|ccc} \hline a & b & c & a & b & \\ \hline d & e & f & d & e & \\ \hline g & h & i & g & h & \\ \hline \end{array}$$

$$= (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$$

ให้เขียนสองหลักแรกของ A ต่อจากเมทริกซ์เดิม แล้วคูณทแยงดังรูปข้างต้น

4. การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n > 2$

$$\text{ให้ } A = [a_{ij}]_{n \times n} \text{ เมื่อ } n \in I, n > 2$$

ไมเนอร์ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย $M_{ij}(A)$ คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i หลักที่ j ออกจากเมทริกซ์ A

โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย $C_{ij}(A)$

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$$

$$\text{ถ้าตัดแถวที่ } i \text{ จะได้ } \det(A) = a_{i1}C_{i1}(A) + a_{i2}C_{i2}(A) + \dots + a_{in}C_{in}(A)$$

$$\text{ถ้าตัดแถวที่ } j \text{ จะได้ } \det(A) = a_{1j}C_{1j}(A) + a_{2j}C_{2j}(A) + \dots + a_{nj}C_{nj}(A)$$

(นิยมเลือกแถว หรือหลักที่มี 0 อยู่หลายตัว)

สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^n) = \det(A)^n$
- ถ้า $\det(A) = 0$ จะหา A^{-1} ไม่ได้ เรียก A ว่า **ซิงกูลาร์เมทริกซ์หรือ เมทริกซ์เอกฐาน**
ถ้า $\det(A) \neq 0$ จะหา A^{-1} ได้ เรียก A ว่า **นอนซิงกูลาร์เมทริกซ์หรือ เมทริกซ์ซึ่งไม่ใช่เอกฐาน**
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ เมื่อ $\det(A) \neq 0$
- ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกแถวใดแถวหนึ่ง (หลักใดหลักหนึ่ง) เป็นศูนย์ทุกตัว
แล้ว $\det(A) = 0$
- ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกสองแถว (สองหลัก) ใดๆ เหมือนกัน
แล้ว $\det(A) = 0$
- ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส เมทริกซ์ B เกิดจากการคูณสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง (หลักใดหลักหนึ่ง) ของ A ด้วยค่าคงตัว $k \neq 0$ แล้ว $\det(B) = k \det(A)$
- ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ และ k เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า $\det(kA) = k^n \det(A)$

10. ให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส เมตริกซ์ B เกิดจากการสลับแถว(หลัก) คู่ใดคู่หนึ่งของ A
แล้ว $\det(B) = -\det(A)$
11. ให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส เมตริกซ์ B เกิดจากการนำค่าคงตัว $k \neq 0$ ไปคูณสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง
(หลักใดหลักหนึ่ง) แล้วนำไปบวกกับแถว(หลัก) อื่นของ A โดยนำค่าที่ได้ใหม่แทนลงในแถว(หลัก)
ที่บวกนั้น จะได้ $\det(B) = \det(A)$
12. ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสซึ่งมีสมาชิกที่อยู่เหนือหรือใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทุกตัว
 $\det(A) =$ ผลคูณของสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลัก
13. $\det(I_n) = 1$ และ $\det(O) = 0$

6. อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์

ให้ A เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย A^{-1}

$$\text{โดยที่ } AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

อินเวอร์สการคูณของ 2×2 เมตริกซ์

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $ad - bc \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

อินเวอร์สการคูณของ $n \times n$ เมตริกซ์

ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ $a_{ij} \in \mathbb{R}$ และ $n \in \mathbb{I}, n > 1$

1. เมตริกซ์ผกผัน (adjoint matrix) ของ A เขียนแทนด้วย $\text{adj}A$ คือ ทรานโพสของเมตริกซ์ $[C_{ij}(A)]_{n \times n}$

$$\text{adj}A = [C_{ij}(A)]^t$$

2. $A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = \det(A)I$

3. ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้ว $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}A$

สมบัติอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์

ให้ $A, B, A_1, A_2, \dots, A_k$ เป็นเมตริกซ์ซึ่งมิใช่เอกลักษณ์

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3. $(A_1A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \dots A_2^{-1}A_1^{-1}$

4. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}, c \in \mathbb{R}$ และ $c \neq 0$

5. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

6. $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m, m \in \mathbb{I}^+$

7. ถ้า $AB = AC$ และ A เป็นเมตริกซ์ซึ่งมิใช่เอกลักษณ์แล้ว $B = C$

7. การใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \text{ระบบสมการเชิงเส้น} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

เรียก A ว่า **เมทริกซ์สัมประสิทธิ์** และ

$$\text{เรียกเมทริกซ์ } [A : B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix} \quad \text{ว่า เมทริกซ์แต่งเติม (augment matrix)}$$

1. ใช้อินเวอร์สการคูณ

จาก $AX = B$ และ $\det(A) \neq 0$

$$\text{จะได้ } X = A^{-1}B$$

ข้อควรทราบ

- ถ้า A เป็นเมทริกซ์ซึ่งไม่ใช่เอกนาม ($\det(A) \neq 0$) ระบบสมการนี้จะมีคำตอบเดียว $x = A^{-1}B$
- ถ้า A เป็นเมทริกซ์เอกนาม ($\det(A) = 0$) ระบบสมการนี้อาจมีคำตอบมากมาย หรืออาจไม่มีคำตอบเลยก็ได้

2. ใช้กฎของคราเมอร์

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

เมื่อ A_i คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการแทนหลักที่ i ของ A ด้วยหลักของ B

3. ใช้เมทริกซ์แต่งเติม

จากระบบสมการเชิงเส้น $Ax = B$

1. สร้างเมทริกซ์แต่งเติม $[A : B]$

2. เปลี่ยนแปลงเมทริกซ์แต่งเติมโดยใช้การดำเนินการตามแถว จนกระทั่งเมทริกซ์ใหม่ในรูป $[I_n : C]$

การดำเนินการตามแถว (Row Operation) มี 3 วิธี คือ

- สลับที่ระหว่างแถวที่ i กับหลักที่ j เขียนแทนด้วย R_{ij}
- คูณสมาชิกทุกตัวในแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว $c \neq 0$ เขียนแทนด้วย cR_i
- เปลี่ยนแถวที่ i โดยการบวกแถวที่ i ด้วย c เท่าของแถวที่ j เขียนแทนด้วย $R_i + cR_j$















