อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชัน

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f(x) เมื่อ x เปลี่ยนจาก x เป็น x+h มีค่าเท่ากับ

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หรือ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เมื่อ $y = f(x)$

2. อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันขณะใดขณะหนึ่ง

อัตราการเปลี่ยนแปลงของf(x) เทียบกับ x ขณะx ใดๆมีค่าเท่ากับ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = y'$

เรียกค่าลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x บางครั้งใช้สัญลักษณ์ $\frac{dy}{dx}$

3. สูตรที่ใช้หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

กำหนด u และ v เป็นฟังก์ชันพีชคณิต และ $n \in R$

1. $\frac{dc}{dx} = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\frac{dx}{dx} = 1$
3. $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}\frac{dx}{dx} = nx^{n-1}$
4. $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$
5. $\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}cu = c\frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
8. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
9. กฎลูกโซ่ (Chain Rule)

   ถ้า $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$
10. ถ้า $y = f(x)$ มี Inverse Function เป็น $x = g(y)$

    จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

4. ทฤษฎีเกี่ยวกับอนุพันธ์และความต่อเนื่อง

ถ้าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่x = a แล้ว f มีความต่อเนื่องที่ x = a ด้วย

5. ระยะทาง ความเร็ว และ ความเร่ง

ถ้า $y = f(x)$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรงขณะเวลา x ใดๆ นิยมเขียนในรูป $y = f(t)$ หรือ $s = f(t)$ เมื่อ t เป็นเวลาใดๆ

และ $s(t)$ เป็นระยะทางที่วัตถุอยู่ห่างจากจุดอ้างอิงเมื่อเวลาผ่านไป t หน่วยเวลา

โดย $s'(t)$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางขณะเวลาtใดๆ

จะใช้สัญลักษณ์ $s'(t) = v(t)$ ซึ่งนิยามว่า ความเร็ว (Velocity) ของวัตถุในขณะเวลา t ใดๆ

ส่วน $|v(t)|$ จะเรียกว่า ความเร็ว (Speed) ขณะเวลา t ใดๆ

อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วขณะเวลาt ใดๆ จะใช้สัญลักษณ์ $v'(t) = a(t)$

ซึ่งนิยามว่า ความเร่ง (Acceleration)ของวัตถุในขณะเวลาtใดๆ

สรุป $\boxed{s(t) \xrightarrow{\text{diff.}} v(t) \xrightarrow{\text{diff.}} a(t)}$

$v(t) = \frac{ds}{dt}$

$a(t) = \frac{dv}{dt}$

6. ความชันของเส้นโค้ง

นิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ให้กราฟเป็นเส้นโค้งที่จุด $P(x , y)$ ใดๆ จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดP และมีความชันเท่ากับ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

นิยาม ความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณจุด $P(x , y)$ ใดๆที่อยู่บนเส้นโค้งนี้จะเท่ากับความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง ณ จุดP

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด (a , b) คือ $y-b = f'(a)(x-a)$

7. ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของR ไป R และ $(a,b) \subset D_f$

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง (a , b)ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x \in (a , b)$ ที่ทำให้ $f'(x) > 0$
2. f เป็นฟังก์ชันลดในช่วง (a , b) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x \in (a , b)$ ที่ทำให้ $f'(x) < 0$

8. ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของR ไป R และ $(a,b) \subset D_f$

1. ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ โดย $c \in (a , b)$ ที่ทำให้ $f(c) > f(x)$
   สำหรับทุก x ในช่วง (a , b) ที่ $x \neq c$
2. ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ โดย $c \in (a , b)$ ที่ทำให้ $f(c) < f(x)$
   สำหรับทุก x ในช่วง (a , b) ที่ $x \neq c$

วิธีหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

1. หาค่าm จาก $f'(x)$ เนื่องจากฟังก์ชันจะมีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เมื่อ$m = 0$

2. ให้ $f'(x) = 0$ แก้สมการหาค่า x เรียกค่า x ที่ได้นี้ว่า ค่าวิกฤต
   ใช้ c แทน x เหล่านั้น ซึ่ง $f'(c) = 0$

3. หาค่า $f''(x)$ เรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชัน (m') โดยพิจารณาจาก $f''(c)$ ถ้า
   - $f''(c) > 0$ จะให้ค่า f(c) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
   - $f''(c) < 0$ จะให้ค่า f(c) เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
   - $f''(c) = 0$ จะทำให้จุดเปลี่ยนเว้า (Point of Inflection) หรือกรณีอื่นๆ

9. ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

สำหรับทุก x ในโดเมนของฟังก์ชัน f

1. ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$ ถ้า $f(c) > f(x)$ โดย $x \neq c$
2. ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$ ถ้า $f(c) < f(x)$ โดย $x \neq c$

10. วิธีแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพันธ์

1. อ่านโจทย์เมื่อพบว่าโจทย์ต้องการให้อะไรมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด กำหนดให้สิ่งนั้นเป็น f(x) โดยระบุต่อท้ายด้วยว่า x คือ ปริมาณใด

เช่น โจทย์ต้องการให้มีกำไรสูงสุดเมื่อขายสินค้าจำนวนหนึ่ง จะกำหนดดังนี้

ให้ f(x) = กำไรที่ได้จากการขายสินค้า x ชิ้น

2. เขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง f(x) กับ x

3. หา $f'(x) = 0$

4. หา $f'(x) = 0$ แล้วแก้สมการหาค่า x จะได้ค่าวิกฤต c

5. ตรวจสอบค่าวิกฤต c ว่าให้ $f''(c)$ เป็นเช่นใด
   - $f''(c) > 0$ จะให้ f(c) ต่ำสุดสัมพัทธ์
   - $f''(c) < 0$ จะให้ f(c) สูงสุดสัมพัทธ์