วิธีเรียงสับเปลี่ยน วิธีจัดหมู่ ทฤษฎีบททวินาม และทฤษฎีความน่าจะเป็นเบื้องต้น

1. แฟกทอเรียลและกฎการนับเบื้องต้น

1. $n! = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$. เมื่อ $n \in I^+$ และ “0”
2. **กฎการคูณ** : การทำงานที่มี K ขั้นตอน
   ถ้าขั้นตอนแรกมีวิธีทำงานได้ n_1 วิธี
   ถ้าขั้นตอนสองทำได้ n_2 วิธีไปเรื่อย ๆ
   จำนวนวิธีของการทำงานทั้งหมด $= n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$ วิธี
3. **กฎการบวก** : ในการทำงานชิ้นหนึ่งมีวิธีเลือกทำงานให้เสร็จได้ k หนทาง
   ในแต่ละหนทาง (ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน) มีวิธีเลือกทำได้ $n_1, n_2, \ldots, n_k$ วิธี
   ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกทำงานชิ้นนี้ให้เสร็จ $= n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ วิธี

2. Permutation (เรียงสับเปลี่ยน)

1. จำนวนวิธีสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน เท่ากับ n! วิธี
2. จำนวนวิธีสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยจัดครั้งละ r สิ่ง เท่ากับ

$$ {}^{n}p_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ วิธี} $$

3. จำนวนวิธีสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันเป็นวงกลม $= (n-1)!$ วิธี
4. จำนวนวิธีสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันเป็นวงกลมเป็น 3 มิติ (พลิกกลับไปมาได้)

$$ = \frac{(n-1)!}{2} $$

5. ถ้ามีสิ่งของ n สิ่ง ในจำนวนนี้มี n_1 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่หนึ่ง
   มี n_2 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่สอง และไปเรื่อย ๆ โดย $n_1 + n_2\, n_3 + \ldots + n_k = n$
   จำนวนวิธีสับเปลี่ยนของ n สิ่ง จะได้จำนวนวิธีแบ่งกลุ่ม $= \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

ในกรณีแบ่งกลุ่ม และกลุ่มที่แบ่งมีจำนวนของในกลุ่มที่เหมือนกันเท่ากัน ให้เอาจำนวนกลุ่มดังกล่าวที่เท่ากันเป็น Factorial และหารในผลลัพธ์ที่ได้

3. วิธีจัดหมู่ (Combination)

1. จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของต่างกัน n สิ่ง ครั้งละ r สิ่ง เท่ากับ ${}^{n}c_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
2. $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$
3. สิ่งของ n สิ่งที่เหมือนทั้งหมด ต้องการแจกให้คน k คน โดยมีเงื่อนไขว่า
   1) จะต้องได้ทุกคน ทำได้ $\binom{n-1}{k-1}$ วิธี
   2) บางคนอาจจะไม่ได้เลย ทำได้ $\binom{n+k-1}{n-1}$ วิธี

4. ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

(1) $(a+b)^n \;=\; a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$

(2) พจน์ที่ r+1 $= \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ เรียก $\binom{n}{r}$ ว่าสัมประสิทธิ์ทวินาม

ผลสรุปที่น่าสนใจ

1. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$
2. $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$
3. $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \ldots + \binom{n+r}{n} = \binom{n+r+1}{n+1}$

5. ทฤษฎีของความน่าจะเป็น

1.) สรุปสูตร

(1) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

(2) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ โดย E_1, E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

(3) $P(E') = 1 - P(E)$

(4) $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$ เมื่อ E_1, E_2 เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระซึ่งกันและกัน

(5) $P(E_1 - E_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)$

(6) $0 \le P(E) \le 1$

(7) $P(\varnothing) = 0$

(8) $P(s) = 1$

2.) ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E_1 เมื่อมีเงื่อนไขว่าเหตุการณ์ E_2 เกิดขึ้นแล้ว เรียกว่า **" ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข"** เขียนแทนด้วย $P(E_1|E_2)$

โดย $\boxed{P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}}$

3. การทดลองซ้ำกันเป็นจำนวนจำกัดครั้ง

การทดลองอย่างหนึ่งในแต่ละครั้งมีผลลัพธ์แบ่งได้เป็น 2 พวก คือ สำเร็จหรือไม่สำเร็จ ถ้าโอกาสที่สำเร็จเท่ากับ P โอกาสที่ไม่สำเร็จจะเท่ากับ $1 - P$ เมื่อทำการทดลองนี้ซ้ำกัน n ครั้ง **"โอกาสที่จะสำเร็จเป็นจำนวน k ครั้งพอดี"**

จะได้

$$\boxed{P(\text{ทำซ้ำ } n \text{ ครั้ง สำเร็จ } k \text{ ครั้ง}) = \binom{n}{k} P^{k}(1-P)^{n-k}}$$