ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

1. ทบทวนสมบัติของเลขยกกำลัง

กำหนด $a, b \in R$ และ $m, n \in I$

1.) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2.) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

3.) $(ab)^n = a^n b^n$

4.) $a^0 = 1$ เมื่อ $a \neq 0$

5.) $(a^m)^n = a^{mn}$

6.) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ เมื่อ $a \neq 0$

7.) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ เมื่อ $b \neq 0$

เลขยกกำลังที่มีฐานเป็นบวกและเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วน ใช้กับสมบัติข้างต้นนี้

2. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นตรรกยะ

ถ้า n เป็นจำนวนคู่บวก และ $a \geq 0$ จะได้ $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริง หรือศูนย์ด้วยโดย $(\sqrt[n]{a})^n = a$

ถ้า n เป็นจำนวนคี่บวก; $a \in R$ จะได้ $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริงบวกหรือจำนวนจริงลบขึ้นอยู่กับ a

ข้อสังเกต 1.) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ เมื่อ $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b} \in R$

2.) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่บวก} \\ a & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่บวก} \end{cases}$

3. รากที่สองของจำนวนที่อยู่ในรูป $(a+b) \pm 2\sqrt{ab}$

$$\because \quad (a+b) \pm 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a})^2 \pm 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2$$

$$= (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$$

$\therefore$ รากที่สองของ $(a+b) \pm 2\sqrt{ab} = \pm\left|\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right|$

4. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

นิยาม $f = \{(x, y) \in R \times R^+ \mid y = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1\}$

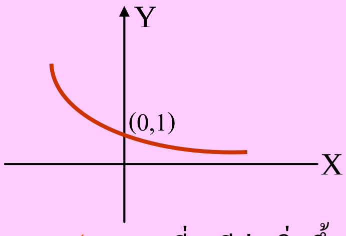
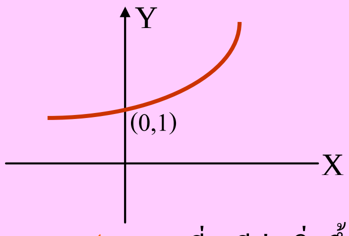
1.) สมบัติของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

1. กราฟตัดแกน Y ที่จุด $(0, 1)$ เสมอ
2. เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1 แบบสมนัยคือ $f: R \xrightarrow[1-1]{onto} R^+$
3. มีฟังก์ชันอินเวอร์สเป็น $f^{-1}: R^+ \xrightarrow[1-1]{onto} R$ ชื่อฟังก์ชันลอการิทึม
4. ถ้า $a > 1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม นั่นคือ $a^{x_1} > a^{x_2}$ สรุปว่า $x_1 > x_2$

   $0 < a < 1$ เป็นฟังก์ชันลด นั่นคือ $a^{x_1} > a^{x_2}$ สรุปว่า $x_1 < x_2$

5. เนื่องจากเป็น 1-1 function ถ้า $a^{x_1} = a^{x_2}$ แล้วจะได้ $x_1 = x_2$ ใช้สำหรับการแก้สมการ
6. กราฟของ $y = a^x$ สมมาตรกับ $y = a^{-x}$ เทียบกับแกนY

สรุป ลักษณะกราฟฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

กรณี $0 < a < 1$	กรณี $a > 1$
(1)  ลักษณะของกราฟ : ขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้น y จะมี ______	(1)  ลักษณะของกราฟ : ขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้น y จะมี ______
(2) จากลักษณะของฟังก์ชันลด จะได้ว่า $x_1 > x_2 \longleftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ หรือ $x_1 < x_2 \longleftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$	(2) จากลักษณะของฟังก์ชันเพิ่ม จะได้ว่า $x_1 > x_2 \longleftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ หรือ $x_1 < x_2 \longleftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

5. ฟังก์ชันลอการิทึม

นิยาม $f = \{(x, y) \in R \times R^+ \mid y = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1\}$ เรียก ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

จะได้ $f^{-1} = \{(x, y) \in R \times R^+ \mid y = \log_a x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1\}$ เรียก ฟังก์ชันลอการิทึม

ข้อสังเกต จาก $x = a^y \leftrightarrow y = \log_a x$

จะเห็นว่าค่าของเลขชี้กำลัง (y) คือ ค่าของlog

ควรทราบ

1. ฐาน (a) ต้องมีค่าเป็นบวก และ $\neq 1$
2. ตัวตามหลัง log ต้องเป็นบวกเท่านั้น
3. ค่าของ log เป็นได้ทั้งบวก ลบ หรือ ศูนย์

สมบัติของกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

1. กราฟผ่านจุด (1, 0) เสมอ
2. ถ้า $a > 1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม นั่นคือ $\log_a x_1 > \log_a x_2$ สรุป $x_1 > x_2$

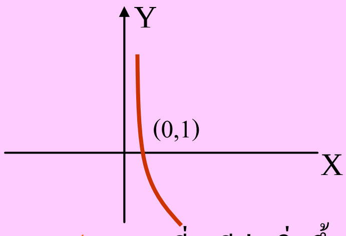
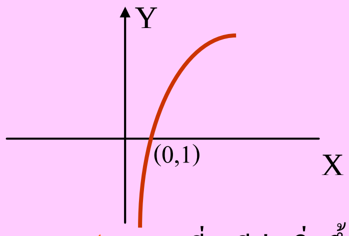
   $0 < a < 1$ เป็นฟังก์ชันลด นั่นคือ $\log_a x_1 > \log_a x_2$ สรุป $x_1 < x_2$
3. เนื่องจากเป็น 1-1 function ถ้า $\log_a x_1 = \log_a x_2$ แล้ว $x_1 = x_2$ ใช้แก้สมการ
4. กราฟของ $y = \log_a x$ สมมาตรกับ $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ เทียบกับแกนX
5. จากกราฟ $y = \log_a x$ พิจารณาเมื่อ $a > 1$ กับ $0 < a < 1$

ถ้าตัวตามหลัง log และฐานเกิน 1 ทั้งคู่ หรือน้อยกว่า 1 ทั้งคู่ ค่าของlog จะเป็นบวก แต่ถ้าตัวหนึ่งมากกว่า 1 อีกตัวน้อยกว่า1 ค่าของlog จะเป็นลบ

เช่น $\log_2 3 > 0$, $\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} > 0$

แต่ $\log_2 \frac{1}{3} < 0$, $\log_{\frac{1}{5}} 2 < 0$

สรุป ลักษณะกราฟฟังก์ชันลอการิทึม

กรณี $0 < a < 1$	กรณี $a > 1$
(1)  ลักษณะของกราฟ : ขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้น y จะมี ________	(1)  ลักษณะของกราฟ : ขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้น y จะมี ________
(2) จากลักษณะของฟังก์ชันลด จะได้ว่า $x_1 > x_2 \longleftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$ หรือ $x_1 < x_2 \longleftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$	(2) จากลักษณะของฟังก์ชันเพิ่ม จะได้ว่า $x_1 > x_2 \longleftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$ หรือ $x_1 < x_2 \longleftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

6. สมบัติของลอการิทึม

เมื่อ M , N $\in R^+$ และ $a > 0$ แต่ $a \neq 1$

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^r = r\log_a M$ เมื่อ $r \in R$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ ใช้เปลี่ยนฐานจาก a เป็น b
7. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ เมื่อ $b > 0$ และ $b \neq 1$
8. $\log_{a^n} M = \frac{1}{n}\log_a M$ เมื่อ $n \in R$
9. $\log_{\frac{1}{a}} M = -\log_a M$
10. $a^{\log_a M} = M$

11. $a^{\log b} = b^{\log a}$

12. $\log 2 = 1-\log 5$

$\log 5 = 1-\log 2$

7. ลอการิทึมสามัญ

ลอการิทึมสามัญ คือ ลอการิทึมที่มีฐานเป็นสิบ

เขียนสัญลักษณ์จะได้ คือ $y = \log_{10}x = \log x$

ค่าของ log แบ่งเป็น 2 ส่วน

1. ส่วนที่เป็นจำนวนเต็ม เรียกว่า ค่าแคแรคเตอริสติก (characteristic)
2. ส่วนที่เป็นทศนิยมบวกหรือศูนย์เรียกว่า ค่าแมนทิสซา (mantissa)

เนื่องจาก $N = A\times10^{n}$; $A\in[1 , 10)$ และ $n \in I$

$\text{Log } N = \log A + n \log 10$

$= n + \log A$

เรียก n ว่า ค่าแคแรคเตอริสติก

เรียก logA ว่า ค่าแมนทิสซา

$\because 1 \le A < 10$

$\log 1 \le \log A < \log 10$

$0 \le \log A < 1$

ทำให้ค่าแมนทิสซามีค่าในช่วง [0 , 1)

เช่น

$\log 1074 = \log(1.074 \times 10^{3})$

$= \log 1.074 + \log 10^{3}$

$= \log 1.074 + 3$

เรียก 3 ว่า แคแรคเตอรีสติกของ log1074

และเรียก log1.074 ว่า แมนทีสซาของ log 1074

ข้อควรรู้ log ของเลขชุดเดียวกันจะต้องมีค่าแมนทิสซาเท่ากัน

จะต่างกันที่ค่าคาแรคเตอริสติกเท่านั้น

ให้ $\log 2 = 0.3010$

$\log 2000 = 3.3010$

$\log 0.2 = \bar{1}.3010$

8. แอนติลอการิทึม

ถ้าให้ y = log N

Antilog ของ y = antilog(logN) = N

9. ลอการิทึมธรรมชาติ

ลอการิทึมธรรมชาติ คือ ลอการิทึมฐาน e โดย e = 2.7182818... เป็นจำนวนอตรรกยะ นิยมเขียน ln x แทน $\log_e x$ อ่านว่า แอลเอ็น เอ็กซ์

การหาค่าต้องเปลี่ยนเป็นฐานสิบ โดยกฎของลอการิทึม

ข้อสังเกต $\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\log e = 0.4343$ จากตาราง

10. การแก้สมการลอการิทึม

การแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียลที่ตัวแปรอยู่ในรูปเลขชี้กำลัง และฐานของเลขยกกำลังไม่เท่ากันต้องใช้ลอการิทึมช่วย โดยการใส่ log (take log) ทั้งสองข้างฐานเดียวกัน

การแก้สมการลอการิทึมบางครั้งอาจต้องเปลี่ยนกลับไปอยู่ในรูปเลขยกกำลัง

ข้อควรระวัง คำตอบที่ได้จากการแก้สมการลอการิทึม ต้องตรวจสอบว่าคำตอบนั้นให้ตัวติดหลัง log เป็นบวก จึงใช้ได้ แต่ถ้าตัวแปรอยู่ในรูปฐานของlog ตัวแปรต้องทำให้ฐานของlog เป็นบวก และไม่เท่ากับ 1 จึงใช้ได้

รูปแบบของสมการลอการิทึม

1. ถ้าอยู่ในรูป $\log_a \square = \log_a \Delta$ แล้วสรุปว่า $\square = \Delta$ หลังจากนั้นก็แก้สมการหาตัวไม่ทราบค่า (ตัวแปร)

2. ถ้าอยู่ในรูป $a\square^2 + b\square + c = 0$ โดยที่ $\square = \log_a$(ตัวแปร) ให้ใช้วิธีการแยกตัวประกอบ หรือใช้สูตร $ax^2 + bx + c = 0$ แก้สมการหาค่าตัวแปร แต่ คำตอบที่ได้ต้องแทนค่ากลับเพื่อตรวจสอบว่าตัวตามหลัง log ติดลบหรือไม่ (ติดลบไม่ใช่คำตอบ)