ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมประกอบบางมุม

(1) เป็นโค-ฟังก์ชัน(Co – Function) คือมุมประกอบ $\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)$ **กับ** $\left(\frac{3\pi}{2}\pm\theta\right)$

เครื่องหมายพิจารณาตามควอดรันต์

$$Q_1 : \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta \\ \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta \\ \tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cot\theta \end{cases} \qquad Q_2 : \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos\theta \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta \\ \tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\cot\theta \end{cases}$$

$$Q_3 : \begin{cases} \sin(\frac{3\pi}{2}-\theta) = -\cos\theta \\ \cos(\frac{3\pi}{2}-\theta) = -\sin\theta \\ \tan(\frac{3\pi}{2}-\theta) = \cot\theta \end{cases} \qquad Q_4 : \begin{cases} \sin(\frac{3\pi}{2}+\theta) = -\cos\theta \\ \cos(\frac{3\pi}{2}+\theta) = \sin\theta \\ \tan(\frac{3\pi}{2}+\theta) = -\cot\theta \end{cases}$$

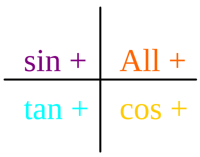
(2) เป็นฟังก์ชันเดิม คือมุมประกอบ $(\pi\pm\theta)$, $(2\pi\pm\theta)$, $(-\theta)$

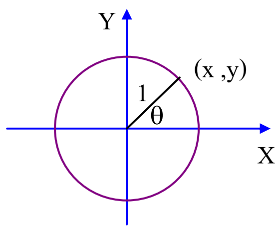
เครื่องหมายพิจารณาตามควอดรันต์ ดังนี้

$$Q_1 : \begin{cases} \sin(2\pi+\theta) = \sin\theta \\ \cos(2\pi+\theta) = \cos\theta \\ \tan(2\pi+\theta) = \tan\theta \end{cases} \qquad Q_2 : \begin{cases} \sin(\pi-\theta) = \sin\theta \\ \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta \end{cases}$$

$$Q_3 : \begin{cases} \sin(\pi+\theta) = -\sin\theta \\ \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi+\theta) = \tan\theta \end{cases} \qquad Q_4 : \begin{cases} \sin(2\pi-\theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ \cos(2\pi-\theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \tan(2\pi-\theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta \end{cases}$$

(3) วงกลมหนึ่งหน่วยและเครื่องหมาย





$$\begin{matrix} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{matrix} \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

2. ฟังก์ชันของตรีโกณมิติของมุมผลบวกและผลต่าง

(1) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

(4) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

(5) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

(6) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(7) $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

(8) $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

(9) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(10) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

(11) $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

(12) $\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}$

3. สูตรแปลงผลบวกหรือผลต่างเป็นผลคูณ

(1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

(2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

(3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

(4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

4. สูตรการแปลงผลคูณเป็นผลบวกหรือผลต่าง

(1) $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

(2) $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$

(3) $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

(4) $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

5. การประยุกต์ตรีโกณมิติในสามเหลี่ยม ABC

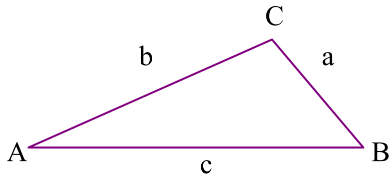
(1) กฎของไซน์ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

(2) กฎของโคไซน์

1.) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

2.) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

3.) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$



(3) กฎของด้าน

$$\boxed{a = b \cos C + c \cos B}$$

(4) พื้นที่ ของ Δ ABC

1.) พ.ท. $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

เมื่อ $s = \frac{a+b+c}{2}$

2.) พ.ท. $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$

$= \frac{1}{2} bc \sin A$

$= \frac{1}{2} ca \sin B$

6. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

function	Amplitude	Period
$y = a \sin bx$	$\lvert a \rvert$	$\left\lvert \frac{2\pi}{b} \right\rvert$
$y = a \cos bx$	$\lvert a \rvert$	$\left\lvert \frac{2\pi}{b} \right\rvert$
$y = a \tan bx$	ไม่มี	$\left\lvert \frac{\pi}{b} \right\rvert$

7. อินเวอร์สของฟังก์ชัน

(1) ต้องจำ Domain และ Range ให้ได้

f^n	Domain	Range
y = arcsin x	[-1 , 1]	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
y = arccos x	[-1 , 1]	$[0,\pi]$
y = arctan x	R	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

(2) สูตรที่สำคัญที่ต้องจำได้

$\sin(\arcsin x) = x$

$\cos(\arccos x) = x$

$\tan(\arctan x) = x$

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$\arctan(-x) = -\arctan x$

$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

เป็นจริงเมื่อ $\arctan x + \arctan y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

(3) ข้อควรระวังบางประการ

1.) $\sin(\arcsin x) = x$ แต่ $\arcsin(\sin x) \neq x$ ต้องพิจารณาเรจน์ประกอบด้วย

2.) การทำโจทย์ที่มีฟังก์ชันอินเวอร์สตรีโกณมิติเข้ามาเกี่ยวข้องจะต้องระวังเรื่อง Range และ Domain เป็นพิเศษ เพราะจะเป็นจริงบางช่วงเท่านั้น

8. รูปทั่วไปของสมการตรีโกณมิติ

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติมีลักษณะเป็นคาบ ดังนั้นในการแก้สมการและอสมการ ถ้าโจทย์ไม่กำหนดช่วงคำตอบของมุมมาให้ จะต้องตอบในรูปทั่วไป

(1) ถ้า $\sin\theta = \sin\alpha$ ค่าทั่วไปคือ

$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$ หรือ

$\theta = 2n\pi + \alpha\ ,\ 2n\pi + (\pi - \alpha)$

(2) ถ้า $\cos\theta = \cos\alpha$ ค่าทั่วไปคือ $\theta = 2n\pi \pm \alpha$

(3) ถ้า $\tan\theta = \tan\alpha$ ค่าทั่วไปคือ $\theta = n\pi + \alpha$

9. ถ้าโจทย์ในรูปต่อไปนี้สรุปได้ว่า

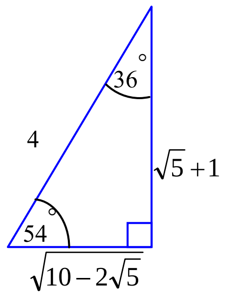
(1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\alpha\ \sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \frac{\sin 3\alpha}{4}$

(2) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\alpha\ \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \frac{\cos 3\alpha}{4}$

(3) $\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\tan\alpha\ \tan\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \tan 3\alpha$

(4) $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 60^\circ \tan 20^\circ \tan 40^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

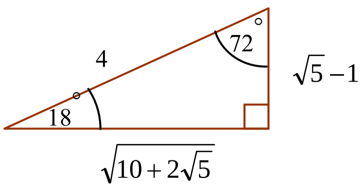
10. ค่าฟังก์ชันของมุมบางมุมที่ควรจำ



(1) $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

(2) $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ระวัง $\begin{cases} 1.\ \ 36^\circ = \frac{\pi}{5} \\ 2.\ \ 54^\circ = \frac{3\pi}{10} \end{cases}$



(3) $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

(4) $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

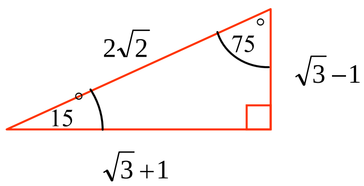
ระวัง $\begin{cases} 1.\ \ 18^\circ = \frac{\pi}{10} \\ 2.\ \ 72^\circ = \frac{2\pi}{5} \end{cases}$

(1) $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(2) $\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

(3) $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$

(4) $\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$



ระวัง $= \begin{cases} 1.\ \ 15^\circ = \frac{\pi}{15} \\ 2.\ \ 75^\circ = \frac{3\pi}{15} \end{cases}$

11. ค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

*กำหนดฟังก์ชันในรูป $a\sin\theta + b\sin\theta$ เมื่อ $a , b \in R$ และ θ เป็นมุมหรือจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

(1) $a\sin\theta + b\cos\theta$ มีค่า min $= -\sqrt{a^2+b^2}$

(2) $a\sin\theta + b\cos\theta$ มีค่า max $= \sqrt{a^2+b^2}$