

ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

1. ฏิกิริยานุพันธ์

นิยาม ฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของ f โดย

$\int f(x)dx$ เป็นสัญลักษณ์แทนการหาปฏิยานุพันธ์ของ f อ่านว่า อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x

โดย $\int f(x)dx = F(x) + c$ เมื่อ $F'(x) = f(x)$ และ c เป็นค่าคงตัว

เรียก \int ว่า เครื่องหมาย อินทิกรัล

$f(x)$ เป็นตัวถูกอินทิเกรต

dx เป็นตัวระบุว่าอินทิเกรตเทียบกับตัวแปร x

c เป็นค่าคงตัวของอินทิเกรต

2. สูตรพื้นฐานในการอินทิเกรต

เมื่อ k และ c เป็นค่าคงตัว

$$1. \int kdx = kx + c$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ เมื่อ } n \neq -1$$

$$\text{ถ้า } n = -1 \text{ จะได้ } \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$3. \int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$4. \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$5. \int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

3. อินทิกรัลจำกัดเขต

$\int_a^b f(x)dx$ เป็นสัญลักษณ์ใช้แทนอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$

โดย $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงนี้

เรียก a ว่า **ลิมิตล่าง** (Lower Limit)

เรียก b ว่า **ลิมิตบน** (Upper Limit)

ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ถ้า $F'(x) = f(x)$ โดยเป็นฟังก์ชันบนช่วง $[a, b]$ นี้แล้ว $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

4. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

ประโยชน์อีกอย่างหนึ่งของอินทิกรัลจำกัดเขต คือ นำไปใช้หาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ จะหมายถึง อาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วยกราฟของ f บนแกน X และเส้นตรง $x = a$ กับเส้นตรง $x = b$

บทนิยาม เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ A เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ f จาก $x = a$ ถึง $x = b$

1. ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ แล้ว

$$A = \int_a^b f(x) dx \text{ เมื่อ } A \text{ เป็นพื้นที่ที่อยู่เหนือแกน } X$$

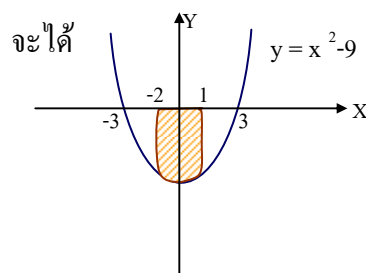
2. ถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ แล้ว

$$A = -\int_a^b f(x) dx \text{ เมื่อ } A \text{ เป็นพื้นที่ที่อยู่ใต้แกน } X$$

3. ถ้า $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ แล้ว

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \text{ เมื่อ } A \text{ เป็นพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง } y = f(x) \text{ กับ } y = g(x)$$

เช่น การหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $f(x) = x^2 - 9$ จาก $x = -2$ ถึง $x = 1$



$$\begin{aligned} \text{จาก } A &= -\int_{-2}^1 (x^2 - 9) dx \\ &= -\left(\frac{x^3}{3} - 9x\right) \Big|_{-2}^1 \\ &= -\left[\left(\frac{1}{3} - 9\right) - \left(-\frac{8}{3} + 18\right)\right] \\ A &= 24 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

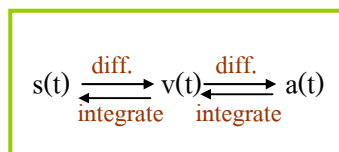
5. ระยะเวลา ความเร็วและความเร่ง

ให้ $s(t)$ = ระยะเวลา หรือ การกระจัด ณ เวลาใดๆ

$v(t)$ = ความเร็ว ณ เวลา t ใดๆ

$a(t)$ = ความเร่ง ณ เวลา t ใดๆ

จะได้ว่า



สรุป 1 $\int a(t) dt = v(t) + c$

2 $\int v(t) dt = s(t) + c$