จำนวนเชิงซ้อน

1. รูปคาร์ทีเชียน

1. C เป็นสัญลักษณ์แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน โดยมีนิยามดังนี้

$C = \{a + bi \mid \forall a, b \in R$ และ $i^2 = -1\}$

หรือ $C = \{(a, b) \mid \forall a, b \in R\}$

2. จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$

มี a เป็น ส่วนจริง (real part)

และ b เป็น ส่วนจินตภาพ (imaginary part)

3. จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจินตภาพเป็น0 เรียกว่า จำนวนจริง
4. จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็น 0 เรียกว่า จำนวนจินตภาพแท้
5. จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงและส่วนจินตภาพไม่เท่ากับ 0 เรียกว่า

จำนวนจินตภาพ (ที่ไม่ใช่จำนวนจินตภาพแท้)

6. i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะมี 4 ค่า ขึ้นกับค่า n ดังนี้

ถ้า 4 หาร n เหลือเศษ 0 จะได้ $i^n = i^0 = 1$

ถ้า 4 หาร n เหลือเศษ 1 จะได้ $i^n = i^1 = i$

ถ้า 4 หาร n เหลือเศษ 2 จะได้ $i^n = i^2 = -1$

ถ้า 4 หาร n เหลือเศษ 3 จะได้ $i^n = i^3 = -i$

7. $i^n + i^{n+1} + i^{n+1} + i^{n+2} = 0$
8. $i^n \cdot i^{n+1} \cdot i^{n+2} \cdot i^{n+3} = -1$
9. สังยุคของ $z = a+bi$ คือ $\bar{z} = a - bi$ จะได้ $z \cdot \bar{z} = a^2+b^2$
10. $R(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ เมื่อ R(z) เป็นส่วนจริงของ z

$I(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2}$ เมื่อ I(z) เป็นส่วนจินตภาพของ z

11. ค่าสัมบูรณ์หรือโมดูลัสของ $z = a+bi$ คือ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
12. จำนวนเชิงซ้อนไม่มีการเปรียบเทียบมากกว่าหรือน้อยกว่า

มีแต่เท่ากับหรือไม่เท่ากับเท่านั้น

13. $|z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots z_n| = |z_1||z_2||z_3|\ldots|z_n|$
14. $|z^n| = |z|^n$
15. อินเวอร์สการคูณของ $z = a+bi$ คือ $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$
16. รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน z จะแบ่งเส้นรอบวงของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง

ที่จุด (0 , 0) รัศมี $\sqrt[n]{|z|}$ ออกเป็น n ส่วนที่เท่าๆกันด้วยจุดที่แทนรากนั้น

17. ถ้า $a + bi$ เป็นรากของสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง
เช่น $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$ โดย $a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \ldots , a_0 \in R$
และ $n \in I^+ \cup \{0\}$ แล้ว $a - bi$ (สังยุคของมัน) จะเป็นรากของสมการนี้ด้วย

18. รากที่สองของจำนวนจินตภาพในรูป $a \pm bi$
จะหาได้โดยการเขียนให้อยู่ในรูป $น^2 \pm 2นล + ล^2$
จะได้ รากคือ $\pm$(น $\pm$ ล) เช่น รากที่สองของ 3+4i

$$3+4i = (2)^2 + 2(2)(i) + (i)^2 = (2+i)^2$$

$\therefore$ รากที่สองของ 3+4i คือ 2+i กับ -2-i

19. รากที่ n ของจำนวนจินตภาพหาได้ง่ายโดยการเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ ในรูปคาร์ทีเซียนเป็นรูปเชิงขั้ว

20. ถ้าสมการพหุนาม $f(x) = 0$ มีดีกรีสูงสุด(n) เป็นจำนวนคี่บวกแล้วจะต้องมีรากเป็นจำนวนจริงอย่างน้อย 1 ตัว

2. รูปเชิงขั้ว

1. การเปลี่ยนรูป a + bi เป็นรูปเชิงขั้ว

$$a + bi = r(\cos\theta + i \sin \theta)$$

เมื่อ $r = |a + bi|$

และ $\theta = \tan^{-1} \dfrac{b}{a}$

2. ทฤษฎีของเดอมัวร์

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือจำนวนเต็มลบ

$$[r(\cos\theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

เมื่อ $k = 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots , n-1$

รากที่ n ของ $r(\cos\theta + i \sin \theta) = \sqrt[n]{r}\left[\cos\dfrac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin\dfrac{2k\pi + \theta}{n}\right]$

3. สมการพหุนาม

1. ทฤษฎีตัวประกอบจำนวนตรรกยะ

เมื่อ $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$

โดย $n \in I^+$ และ $a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \ldots , a_1 , a_0 \in I$ ซึ่ง $a_n \neq 0$ ถ้า $(x - \dfrac{k}{m})$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม f(x) โดยที่ m และ k เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $m \neq 0$ และ ห.ร.ม. ของ m และ k เท่ากับ 1 แล้ว m จะเป็นตัวประกอบของ a_n และ k จะเป็นตัวประกอบของ a_0

2. สมการพหุนาม $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ เมื่อ $n \in I^+$

และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริงที่ $a_n \neq 0$ แล้ว จะได้

ผลบวกของรากทั้งหมดทุกตัว $= -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

ผลบวกของผลคูณของรากทีละ 2 ตัว $= \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$

ผลบวกของผลคูณของรากทีละ 3 ตัว $= -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}$

. .

. .

. .

ผลบวกของผลคูณของรากทีละ n-1 ตัว $= \dfrac{(-1)^{n-1}a_1}{a_n}$

ผลบวกของผลคูณของรากทั้งหมด n ตัว $= \dfrac{(-1)^n a_0}{a_n}$

3. เพื่อสะดวกในการจำและนำไปใช้

รูปสมการพหุนาม $ax^n + bx^{n-1} + \dots + c = 0$ เมื่อ a , b , c เป็นค่าคงตัว

จะได้ ผลบวกของราก n ตัว $= -\dfrac{b}{a}$

ผลคูณของราก n ตัว $= (-1)^n \dfrac{c}{a}$